Эллиптикалық теңдеу үшін спектралдық есеп. Дирихле, Нейман және үшінші шекаралық есептің жалпылама меншікті функциялары. Өзіне өзі түйіндес компакт операторлар үшін операторлық теңдеу.

Спектралдық есеп үшін келесі эллиптикалық теңдеуі

$$-div(p(x)\nabla v(x))+q(x)v(x)=\lambda v(x),\quad x\in\Omega\subset R^n \tag{1}$$

$$v\big|_{\Gamma=\partial\Omega}=0 \tag{2}$$

немесе

$$\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}+\sigma(x)v(x)\big|_{\Gamma=\partial\Omega}=0 \tag{3}$$

шекаралық шартымен қарастырамыз, мұндағы барлық коэффициенттер $p(x),q(x),\sigma(x)$ – жеткілікті жатық функциялар, нақтырақ айтқанда: $p(x)\in C^1(\overline{\Omega}),q(x)\in C(\overline{\Omega}),\sigma(x)\in C(\partial\Omega);\sigma(x)>0,p(x)\geq p_0>0,q(x)\geq 0.$

$\frac{\partial}{\partial\vec{n}}-Q$ цилиндрінің Σ – бүйір бетіне қарай $\vec{n}$ ішкі нормалінің бағыты бойынша алынған туындыны білдіреді. Айталық $\partial\Omega$ –бөлікті жатық бет болсын.

Бізге тек (1),(2) және (1),(3) есептері тривиал емес шешімге ие болатын λ мәндерін табу керек, яғни $\|v\|\neq 0$.

Осындай λ мәндері меншікті мәндер деп аталады, ал сәйкес тривиал емес (1),(2) немесе (1),(3) есептерінің шешімдері *меншікті функциялар* деп аталады. Бір ғана λ мәніне сәйкес келетін сызықты тәуелсіз меншікті функциялардың саны *меншікті мәннің еселігі* деп аталады.

Егер $v(x)$ – меншікті функция болса, онда есептің сызықтығы мен біртектілігіне орай $Cv(x)$ функциясы кез-келген $C\neq 0$ үшін меншікті функция болады.

Сол себепті біз $L_2(\Omega)$ – да нормаланған $\|v\|_{2,\Omega}=1$ шартын қанағаттандыратын меншікті функцияларды қарастырамыз.

Меншікті мәнге жалпылама түрде қойылған есепті қарастырамыз, яғни (1),(2) есебін $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде, ал (1),(3) есебін $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде қарастырамыз.

Анықтама 1. $\forall\overline{\Phi}\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ үшін мына интегралдық тепе-теңдік

$$\int_\Omega\left[\sum_{k=1}^n p(x)\frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x_k}+q(x)v(x)\overline{\Phi}(x)\right]dx=\lambda\int_\Omega v(x)\overline{\Phi}(x)dx, \tag{4}$$

орынды болып λ табылып, оған сәйкес нөлге тепе-тең емес $(v(x)\neq 0)$ (1),(2) теңдеудің жалпылама шешімін осы есептің, яғни *Дирихле есебінің жалпылама меншікті функциясы* деп атаймыз.

2-ші және 3-ші шекаралық есептер үшін:

Анықтама 2. $\forall\overline{\Phi}\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ үшін мына интегралдық тепе-теңдік

$$\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{k=1}^{n} p(x)\frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x_k}+q(x)v(x)\overline{\Phi}(x)\right]dx+\int\limits_{\partial\Omega} p(x)\sigma(x)v(x)\overline{\Phi}(x)dS=\lambda\int\limits_{\Omega} v(x)\overline{\Phi}(x)dx, \qquad (5)$$

орындалатындай λ табылып, оған сәйкес тривиал емес $(v(x)\neq 0)$ табылған $v(x)$ жалпылама шешімін $\sigma(x)\equiv 0$ жағдайда *екінші шекаралық есептің жалпылама меншікті функциясы* деп, немесе $\sigma(x)\neq 0$ жағдайында *үшінші шекаралық есептің жалпылама меншікті функциясы* деп атаймыз.

Біз осыған дейін нақты мәнді функциялар қарастырып келдік және $L_2(\Omega)$ – дегі скалярлық көбейтіндіні $\left(f,\Phi\right)=\int\limits_{\Omega} f(x)\Phi(x)dx$ қолдандық, енді функциялар комплекс мәнді болуы мүмкін деп, сәйкесті $L_2(\Omega)$ – дегі скалярдық көбейтіндіні $\left(f,\overline{\Phi}\right)=\int\limits_{\Omega} f(x)\overline{\Phi}(x)dx$ түрінде аламыз.

Бұдан ары қарай, жалпылама меншікті функцияларды табу үшін, (4),(5) интегралдық тепетеңдіктерді пайдаланамыз. Сондықтан, (4),(5) -тің сол жақтары сәйкесті гильберттік кеңістіктеріндегі скалярлық көбейтіндіні туындатқаны қажет.

(4) теңдіктің сол жағы

$$\left\{f,\overline{\Phi}\right\}=\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{k=1}^{n} p(x)\frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x_k}+q(x)v(x)\overline{\Phi}(x)\right]dx \qquad (6)$$

біздің коэффициенттерге қойған шарттарымыз бойынша $p(x)\geq p_0>0, q(x)\geq 0$ $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ –дегі скалярлық көбейтіндіні тудыртанын анық көруге болады, себебі ол Фридрихс теңсіздігінен және $(v,v)\equiv 0$ теңдігінен шығады.

Тап осылай (5)–ші теңдік үшін де орындалады, егер $W_2^1(\Omega)\ni v(x),\Phi(x)$ үшін $q(x)$ және $\sigma(x)$ бір мезетте нөлге тең болмаған жағдайда, $W_2^1(\Omega)\ni\forall\overline{\Phi}(x)$ үшін

$$\left\{v,\Phi\right\}^{\sigma}=\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{k=1}^{n} p(x)\frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x_k}+q(x)v(x)\overline{\Phi}(x)\right]dx+\int\limits_{\partial\Omega} p(x)\sigma(x)v(x)\overline{\Phi}(x)dS \qquad (7)$$

$q(x) = \sigma(x) = 0$ жағдайында (7) теңдік скалярлық көбейтінді бола алмайды, себебі $\{v, v\}^{\sigma} = 0$ көбейтіндісінен $v = const$ шығады, яғни скалярлық көбейтіндісінің $v = 0$ шарты орындалмайды.

Нейман есебі үшін жалпылама шешімді анықтаудағы интегралдық тепе-теңдіктің сол жағы скалярлық көбейтіндіні туындатуы үшін, (1) теңдеудің орнына өзгертілген эквивалентті келесі теңдеуді қарастырамыз (бұл барлық үш шекаралық есепке бірдей болсын деп қалдырамыз).

$$-div(p(x)\nabla v(x)) + \tilde{q}(x)v(x) = (\lambda + 1)v(x), \quad x \in \Omega \subset R^n \tag{8}$$

мұндағы $\tilde{q}(x) = q(x) + 1 \geq 1$ және (8) теңдеуге сәйкесті (4) және (5) интегралдық тепетеңдіктер үшін ізделінді меншікті мәндер 1 санына жылжиды.

Дирихле есебін, (8) және (2) есепті қарастырамыз. Келесі түрдегі скаляр көбейтіндіні енгіземіз:

$$\{f, \Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \left[p(x) \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x_k} + q(x)v(x)\overline{\Phi}(x) \right] dx \tag{9}$$

Онда (4) интегралдық тепетеңдігі келесі түрге келеді:

$$\{f, \Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = (\lambda + 1)(v, \Phi)_{2,\Omega} \tag{10}$$

Мұндағы $(v, \Phi)_{2,\Omega} = (v, \Phi)_{L_2(\Omega)}$ $L_2(\Omega)$ – дегі қарапайым скалярлық көбейтінді.

Рисс теоремасын пайдаланып, келесі теореманы дәлелдейік.

Теорема 1. *(i)* $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде жататын кез келген $\Phi(x)$ үшін

$$(v, \Phi)_{2,\Omega} = (Av, \Phi)_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \tag{11}$$

теңдігі орынды болатындай сызықтық, шенелген $A : L_2(\Omega) \to \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ операторы табылады.

(ii) A операторының A^{-1} кері операторы бар.

(iii) Егер A операторын $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ –ны $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ -ға бейнелейді деп қарастырсақ, онда ол өзіне-өзі түйіндес емес, компакт болады.

Дәлелдеу. *(ii)* Гильберт кеңістігіндегі сызықтық, үзіліссіз функционалдың жалпы түрі туралы Рисс теоремасын пайдаланамыз. Айталық, $L_2(\Omega) \ni v(x)$ бекітілген функция болсын. Φ бойынша сызықты,

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \ni \Phi(x)$ функциясына әсер ететеін $l_v = l(\Phi) = (v, \Phi)_{2,\Omega}$ функционалын қарастырайық. Ол шенелген, себебі Фридрихс теңсіздігін пайдалана отырып, мына бағалауды аламыз

$$|l_v(\Phi)| = |(v, \Phi)_{2,\Omega}| \le \|v_{2,\Omega}\| \cdot \|\Phi_{2,\Omega}\| \le C\|v_{2,\Omega}\| \cdot \|\Phi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}$$

Сол себепті Рисс теоремасы бойынша $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \ni \Phi(x)$ үшін $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$-де жатататын жалғыз $\omega(x)$ функциясы табылып

$$l_v = (v, \Phi)_{2,\Omega} = \{\omega(x), \Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \quad \forall \Phi(x) \in H_2^1(\Omega)$$

теңдігі орынды болады, сонымен қатар

$$\|\omega(x)\|_{H_2^1(\Omega)} = |l(\Phi)| \le C\|v\|_{2,\Omega} \tag{12}$$

бағалауын аламыз.

Яғни, A сызықтық операторы біздің жағдайымызда, барлық $L_2(\Omega)$ элементтері үшін анықталады:

$A : L_2(\Omega) \to \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, $Av = \omega$, Және A үшін (11) теңдігі орынды, (11) және (12) теңдіктерінен

$$\|Av\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \le C\|v\|_{2,\Omega}.$$

теңсіздігі орынды, яғни А операторы $L_2(\Omega)$–ді $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$-ге бейнелеу операторы ретінде шенелген болып шықты.

A операторының A^{-1} кері операторы бар.

A^{-1} операторы: әртүрлі екі нүктеле әртүрлі мән қабылдайтын сызықтық, A операторы үшін анықталады. Егер осы шарт орындалса; онда анықтама бойынша $Av = \omega$ жағдайында $A^{-1}\omega = v$.

Берілген A операторының мәндер аймағы кері A^{-1} операторының анықталу аймағы болып табылады. A^{-1} кері операторының бар болуының жеткілікті де өажетті шарты болып, *kerA=0* ядросының тривиалдығы саналады, яғни $Au = 0$ болса, онда оның жалғыз шешімі $u = 0$. Біздің жағдайымызда А операторының өзегі тек нөлден ғана тұра ма екенін тексерейік.

Шыныменде, егер бекітілген $L_2(\Omega)\ni v$ үшін $Av=0$ болсын, онда (11) теңдік бойынша $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\ni\Phi(x)$ үшін $(v,\Phi)=0$ осыдан $v=0$ екендігі шығады. Осымен, A^{-1} кері операторының бар болуы дәлелденді.

Енді (11) A операторы $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ –ті $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ -ке бейнелейді десек, онда оның өзіне өзі түйіндес болатынын дәлелдейік. Егер A операторы $L_2(\Omega)$ кеңістігінде анықталып және шенелген болса, онда ол $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде анықталған және шенелген болады, себебі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\subset L_2(\Omega)$. Сондықтан, оынң симметриялы екенін ғана тексеру жеткілікті. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$-дегі барлық v мен Φ үшін $\{Av,\Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}=(v,\Omega)_{2,\Omega}=\overline{(\Phi,v)}_{2,\Omega}=\overline{\{A\Phi,v\}}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}=\{v,A\Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}$ шығады.

Функционалдық талдау курсынан еске түсірейік, A операторы оң анықталған деп аталады, егер одан туындаған шаршы тұлға тек теріс емес мәндер қабылдаса, яғни $(Av,\Phi)\geq 0\ \forall v\in D(A)$.

Осыдан аламыз $\{Av,v\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}=(v,v)\geq 0$, яғни A операторы оң анықталған.

Енді $A:\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\to\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ коспакты екенін көрсетейік. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде кез келген шенеген жиынды қарастырайық. $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\subset L_2(\Omega)$ компакт енгізу теоремасына сәйкес, бұл функциялар жиыны $L_2(\Omega)$ кеңістігінде компакт болады. Демек, кез келген ақырсыз ішкі кеңістіктерінен $L_2(\Omega)$ кеңістігінде іргелі болатын $\{v_{k_s}\}$ тізбекшесін таңдап алуға болады. Бірақ A операторы сызықтық және шенелген. Осыдан $k_s\to\infty$

$$\left\|Av_{k_s}-Av\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}=\left\|A\left(v_{k_s}-v\right)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}\leq C\left\|v_{k_s}-v\right\|_{L_2(\Omega)}\to 0.$$

Ал $s,n>N$ үшін

$$\left\|Av_{k_s}-Av_{k_n}\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}=\left\|A\left(v_{k_s}-v_{k_n}\right)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}\leq C\left\|v_{k_s}-v_{k_n}\right\|_{L_2(\Omega)}=C\left\|v_{k_s}-v\right\|_{L_2(\Omega)}\to 0.$$

Бұдан, $\{Av_{k_s}\}$ тізбекшесі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде іргелі олай болса, А операторы $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$жататын кез келген шенелген $\{v_k\}$ жиынын осы кеңістіктегі компакт жиыны бейнеледі, демек A – компакты оператор.

Меншікті мән туралы есепті зерттеуді жалғастырамыз. Теорема 1 қолданып, (10) теңдікті келесі түрде жазамыз:

$$\{v,\Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = (\lambda+1)\{Av,\Phi\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}\ \forall\Phi(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \tag{13}$$

Осыдан A компакт оператор болатын

$$v=(\lambda+1)Av,\ \forall v(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \tag{14}$$

Операторлық теңдеуін аламыз. (8) теңдеуді (яғни (1) теңдеу үшін Дирихле меншікті мән есебі компакты, теріс емес, өзіне–өзі түйіндес A операторының меншікті мән есебіне айналды. Дәл осылай, (3) екінші жән үшінші шекаралық есепті) шекаралық шарты бар есепті компакты, теріс емес, өзіне-өзі түйіндес А операторының меншікті мән есебіне келтіруге болады.

Теорема 2. Кез келген $\forall\Phi(x)\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ үшін

$$(v,\Phi)_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = (\tilde{A}v, v)_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \tag{15}$$

Теңдігі орындалатындай сызықты шенелген $\tilde{A}: L_2(\Omega)\to \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ (анықталу облысы $L_2(\Omega)$) операторы табылады.

$\tilde{A}$ операторының $\tilde{A}^{-1}$ кері операторы бар.

Егер $\tilde{A}$ операторын $W_2^1(\Omega)$ –дан $W_2^1(\Omega)$-ға қарастырсақ (яғни $D(A) = W_2^1(\Omega)$), онда өзіне-өзі түйіндес, теріс емес, компакт болады. Теорама 2 дәлелденуі Теорема 1 дәлелімен ұқсас дәлелденеді.

Ол үшін (8) теңдеумен туындалған ((5) сәйкес) келесі түрдегі скаляр көбейтінді енгіземіз

Осы скаляр көбейтіндіден туындаған (16) нормасы $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінің нормасына эквивалент екенін оңай көрсетуге болады. Жоғарыда айтылған тұжырымдамаларды қайталай отырып, енді тек $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде (16) скаляр көбейтіндісімен $W_2^1(\Omega)\subset L_2(\Omega)$ енгізудің компактылығы туралы теораманы қолдана отырып, біз операторлық теңдеу үшін меншікті мән есебіне

$$v=(\lambda+1)\tilde{A}v,\ v(x)\in W_2^1(\Omega) \tag{17}$$

келеміз, $\tilde{A}$: $W_2^1(\Omega \to W_2^1(\Omega)$ өзіне – өзі түйіндес, теріс емес, компакт оператор.

1-ші теорема және 2-ші теоремалардан келесі тұжырымдамаларды аламыз.

1 Тұжырым. $(\lambda+1)$ саны $A:\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\to\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ өзіне-өзі түйіндес оң, компакты операторының сипаттауыш саны, ал $v(x)$-осы санға сәйкес меншікті элементі болғанда және тек сонда ғана λ саны (1),(2) спектралдық есебінің меншікті мәні, ал $v(x)$ – сәйкес жалпылама меншікті функциясы болады.

2 Тұжырым. $(\lambda+1)$ саны $\tilde{A}: W_2^1(\Omega \to W_2^1(\Omega)$ өзіне-өзі түйіндес оң, компакты операторның сипаттауыш саны, ал $v(x)$-осы санға сәйкес меншікті элементі болғанда және тек сонда ғана λ саны (1),(3) спектралдық есебінің меншікті мәні, ал $v(x)$ – сәйкес жалпылама меншікті функциясы болады.

§Эллиптикалық оператордың меншікті мәндері мен жалпылама меншікті функцияларының қасиеттері. Негізгі теорема.

Гильберт кеңістігіндегі сызықтық өзіне-өзі түйіндес компакты операторлар теориясынан мыналар белгілі:

1) 2-ші немесе 3-ші есептердің меншікті мәндері саналымды жиыннан артық болмайды.
2) Бұл жиынның ақырлы шектік нүктелері жоқ.
3) Барлық меншікті мәндер нақты.
4) Әрбір меншікті мәнге *H*-тан (2-ші есепте $H=\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ және 3-ші есепте $H=W_2^1(\Omega)$) меншікті функциялардың ақырлы саны сәйкес келеді, яғни сызықты тәуелсіз меншікті функциялардың ақырлы саны. Сонымен, әрбір меншікті мәннің ақырлы еселігі болады.
5) Әртүрлі меншікті мәндерге сәйкес келетін меншікті функциялар H кеңістігіндегі
($H=\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$2-ші есепте және $H=W_2^1(\Omega)$3-ші есепте) өзара ортогонал болады.
6) Меншікті функцияларды нақты қылып таңдауға болады. Бұл L дифференциялдық операторының коэффициенттері мен меншікті мәндерінің нақты болатындығынан шығады. Егер $Lv_0=\lambda_0 v_0$ болса, онда тең $v_0=v_1+iv_2$ болсын деп ұйғара, нақты және жорамал бөліктерін ажыратып, λ_0 меншікті мәніне тиіс v_1 және v_2 өздері де меншікті мән болады: $Lv_k=\lambda_k v_k, k=1,2,\ldots$ сондықтан меншік мәндер екі еселенеді, оған сәйкес меншікті функциялар нақтыланады.
7) 1-ші, 2-ші теореманың дәлелі бойынша A және $\tilde{A}$ операторлары оң болғандықтан, (1),(2) және (1),(3) есептерінің меншікті мәндері теріс

емес, себебі бұл $\Phi \equiv \nu$ үшін (4),(5) тепетеңтіктерден $\|\nu\|_{2,\Omega} = 1$ теңдігін ескере отырып шығаруға болады.

Шынымен де, (4) тепетеңдіктегі Φ орнына $\nu(x)$ меншікті функцияны қойып, Дирихле есебінде мына өрнекті аламыз:

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^{n} p(x) \left|\frac{\partial \nu}{\partial x_k}\right|^2 + q(x)|\nu|^2\right] dx = \lambda \int_{\Omega} |\nu|^2 dx \ \geq 0,$$

және (3) шекаралық есеп үшін

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^{n} p(x) \left|\frac{\partial \nu}{\partial x_k}\right|^2 + q(x)|\nu|^2\right] dx + \int_{\partial\Omega} p(x)\sigma(x) \, |\nu|^2 dS = \lambda \|\nu\|_{2,\Omega}^2 \geq 0 \text{ орынды.}$$

(1) дифференциалдық өрнегімен берілген Дирихле есебінде анықталу аймағы $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ болатын, ал (3) шекаралық есепте анықталу аймағы $W_2^1(\Omega)$ болатын дифференциалдық операторды L арқылы белгілейміз.

Енді, қай уақытта $\lambda = 0$ саны L операторының меншікті мәні бола алады. Келесі теорема сол туралы.

Теорема 3. (1) теңдеумен берілген, анықталу аймағы (2) есебінде $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ болатын, (3) есебінде $W_2^1(\Omega)$ болатын L операторының меншікті мәнінің $\lambda = 0$ тең болуының қажетті де жеткілікті шарты болып $q(x) = 0, \sigma(x) = 0$ саналады. (яғни (1) теңдеудегі $q(x) = 0$ болғанда, Нейман есебінің қойылымы). $\lambda = 0$ жәй (біреселікті) болады, оған сәйкес меншікті функция $\nu(x) = const$ тең болады.

Дәлелдеуі. Қажеттілік шарты. Айталық, $\lambda = 0$ L операторының меншікті мәні, ал $\nu(x) = const \neq 0$ сәйкес меншікті функциясы болсын.

Жалпылама шешім анықтамасын (5) тепетеңдік түрінде қарастырамыз және $\Phi(x)$ функциясы орнына $W_2^1(\Omega)$ жататын $\nu(x)$ функциясын қоямыз. (Дирихле есебінде (4) формулаға $\Phi(x)$ тест функциясының орнына $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ жататын $\nu(x)$ функциясын аламыз).

Онда келесі теңдікті аламыз.

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^{n} p(x) \left|\frac{\partial \nu}{\partial x_k}\right|^2 + q(x)|\vartheta|^2\right] dx + \int_{\partial\Omega} p(x)\sigma(x) \, |\nu|^2 dS = 0,$$

осыдан $p(x)\ |\nabla v| = 0, qv = 0$, яғни $v(x) = const$ болады, тек $q(x) = 0, x \in \Omega$. Ал шекаралық интегралдан $\Omega \ni x$ үшін $\sigma(x) = 0$ шығады. Қажеттілік шарты дәлелденді.

Сонымен қатар, $\lambda = 0$ меншікті мәніне сәйкес $v(x) = const$ меншікті функциясының жалғыздығы дәлелденді, яғни $\lambda = 0$ меншікті мәні біреселікті болады.

Енді шарттың жеткіліктігін дәлелдейміз. Айталық $q(x) \equiv 0, \sigma(x) \equiv 0$ болсын, (3) есепті қарастырамыз. (Дирихле есебіндегі $\lambda = 0$ үшін, $v(x) = 0$ болады, олай болса $\lambda = 0$ меншікті мән болмайды). Сонда (1),(3) есептің қойылымы мына түрге келеді:

$$-div\big(p(x)\nabla v(x)\big) = \lambda v(x), \qquad x \in \Omega, \qquad \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Сонымен $q(x) \equiv 0, \sigma(x) \equiv 0$ үшін, $v(x) = const, \lambda = 0$ меншікті мәні сәйкес, меншікті функция екені анық байқауға болады. Бұл үшін, (5) – формуладағы $q(x) \equiv 0, \sigma(x) \equiv 0$ болғанда, $\int_\Omega p(x)\left|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right|^2 dx = \lambda \int_\Omega |v|^2\, dx$ орынды, $v = const$ деп алсақ, соңғы формуладан $0 = \lambda \int_\Omega |v|^2\, dx$ шығады, ал одан $\int_\Omega |v|^2\, dx \neq 0$ болғандықтан $\lambda = 0$; сонымен $v = const, \lambda = 0$ меншікті мәнге сәйкесті меншікті функция. Теорема дәлелденді.

Жоғарыда зерттелген есептердің (1),(2) (D – есебінің) және (1),(3) (N – есебінің) жалпылама меншікті функцияларының қасиеттерін нақтылап зерделейік.

Қарастырылған есептердің меншікті мәндерін өсуіне байланысты нөмірлеуге болады.

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n \le \cdots,$$

мұндағы әрбір λ_k қанша еселікке ие болса, оны осы тізбекте сонша рет қайталап жазамыз. Сонда ғана әрбір λ_k үшін тек бір ғана жалпылама меншікті функция сәйкес келеді

$$v_1(x), v_2(x), \ldots, v_k(x), \ldots, \tag{18}$$

Сонымен қатар, D – есебі үшін $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде және N – есебі үшін $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде $v_k(x)$ өзара ортогонал және $\|v_k\|_{2,\Omega} = 1$ болады.

Егер біздің алдымыздағы мақсат $L_2(\Omega), \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega), W_2^1$ кеңістіктерінде жататын $\varphi(x)$ функциялардың Фурье қатарына жіктеу болып табылады және осы кеңістіктердегі қарастырылған қатарлардың жинақтылығын зерттейміз.

Сұрақ: Меншікті функциялар сәйкесті кеңістіктердің базисі бола алама?

Жауап: Ия, болады.

Бұл үшін $\{\lambda_k\}^{\infty}$ тізбегіне сәйкес табылған $\{\nu_k\}_1^{\infty}$ меншікті функциялар тізбегінің Гильберт-Шмидт теоремасының алғы шарттарын қанағаттандыратынын көрсету қажет.

Ол үшін (14) және (17) операторлық теңдеулерге λ_k және $\nu_k(x)$ қойып қарастырамыз.

$$\nu_k = (1 + \lambda_k) A \nu_k, \tag{19}$$

$$\nu_k = (1 + \lambda_k) \tilde{A} \nu_k. \tag{20}$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде (19) теңдеуін ν_k функциясына скалярлы көбейтіп және (11) теңдікті пайдаланып келесі теңдікті аламыз:

$$\{\nu_k, \nu_k\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)(\nu_k, \nu_k)_{2,\Omega} = (\lambda_k + 1) \tag{21}$$

(21) теңдіктен

$$\frac{\nu_1}{\sqrt{\lambda_1 + 1}}, \frac{\nu_2}{\sqrt{\lambda_2 + 1}}, \dots \frac{\nu_k}{\sqrt{\lambda_k + 1}}, \dots, \tag{22}$$

жүйесі $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған болып шығады.

Дәл осылай, (20) теңдеуден $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде $\nu_k(x)$ функциясына скалярлы көбейтіп (16) формуланы пайдаланып келесі теңдікті аламыз:

$$\{\nu_k, \nu_k\}_{W_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)\big(\tilde{A}\nu_k, \nu_k\big)_{W_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1)(\nu_k, \nu_k)_{W_2^1(\Omega)} = (\lambda_k + 1) \tag{23}$$

(23) теңдігінен

$$\frac{\nu_1}{\sqrt{\lambda_1 + 1}}, \frac{\nu_2}{\sqrt{\lambda_2 + 1}}, \dots \frac{\nu_k}{\sqrt{\lambda_k + 1}}, \dots, \tag{24}$$

(3) есеп үшін $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған болып шығады.

Функционалдық талдау дәрістерінен белгілі Гильберт-Шмидт теоремасы:

Теорема 4. H гильберт кеңістігінде кез-келген сызықтық, компакты, өзіне-өзі түйіндес $A: H \to H$ операторы үшін, оның меншікті элементтерінен тұратын ортонормаланған $\{e_k\}$ жүйесі бар және сәйкесті $\{\lambda_k\}$ меншікті мәндері арқылы H кеңістігінің кез-келген φ элементін осы жүйе бойынша тек қана жалғыз түрде

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \, e_k + \varphi'$$

бейнелінеді, мұндағы $\varphi^{'} \in KerA$, $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \, e_k$ H -та жинақталады, ал $A\varphi$ бейнесі Фурье қатарына $\{e_k\}$ жүйесі бойынша жіктеледі

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k \, e_k$$

Гильберт-Шмидт теоремасы маңызды салдарға ие:

Салдар: Айталық, сызықтық, компакты, өзіне-өзі түйіндес $A: H \to H$ операторының өзегі тривиал болсын, онда $\{e_k\}$ жүйесі Н кеңістігінде ортонормаланған базис болады.
Ескерте кететін жайт, егер H кеңістігінің кез келген φ элементі $\{e_k\}$ жүйесі бойынша H кеңістігінде Фурье қатарына $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \, e_k$ жіктелсе, онда ортонормаланған $\{e_k\}$ жүйесі толық немесе H кеңістігінің ортонормаланған базисі деп аталады.

Гильберт-Шмидт теоремасының салдарын пайдаланып, алынған (22) ((24)) жүйелерінің $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ $(W_2^1(\Omega))$ кеңістіктерінде ортонормаланған базис болатынын анық байқауға болады. Ал, $W_2^1(\Omega)$ $(W_2^1(\Omega))$ кеңістіктері шексіз өлшемді, онда (22) ((24)) жиындары да шенелмеген. Сондықтан, гильберт кеңістіктеріндегі сызықтық, компакты, өзіне-өзі түйіндес A үшін, меншікті мәндерінің $\kappa \to \infty$ ұмтылғанда ақырлы шектік мәндері жоқ, яғни $\lambda_\kappa \to \infty$.
(18) жүйесінің $L_2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған екенін көрсетейік. Шынымен де, v_κ үшін жазылған (19) операторлық теңдеуін $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде v_j-ға $\kappa \neq j$; скалярлы көбейтіп, (11) теңдікті пайдалана отырып, (20) теңдеуді $W_2^1(\Omega)$-да v_j-ға $\kappa \neq j$; скалярлы көбейтіп, (15)-ті пайдалана отырып, келесі теңдіктерді

$$0=\{v_k,v_j\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}=(\lambda_k+1)\{Av_k,v_j\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}=(\lambda_k+1)\{v_k,v_j\}_{2,\Omega}$$
$$0=\{v_k,v_j\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}=(\lambda_k+1)\{\tilde{A}v_k,v_j\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}=(\lambda_k+1)\{v_k,v_j\}_{2,\Omega}$$

аламыз.

Демек, (18) жүйесі $L_2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған. Сонымен, (22) жүйесі жоғарыда дәлелденгендей $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған базис болғандықтан ((24) сәйкесті $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде), осы жүйеге тартылған сызықтық көпбейнелік, (18) жүйеге де тартылады, элементтерін $L_2(\Omega)$ қарастырсақ, онда (18) жүйенің элементтері $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ кеңістігінде барлық жерде тығыз (және сәйкес $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде). Бірақ $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ $(W_2^1(\Omega))$ кеңістігінде де барлық жерде тығыз. Ал $W_2^1(\Omega)$ $(W_2^1(\Omega))$ кеңістіктері $L_2(\Omega)$ кеңістігінде барлық жерде тығыз болғандықтан, (18) жүйесі $L_2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған базис болады. Олай болса $L_2(\Omega)$ кеңістігінің кез келген φ элементі $L_2(\Omega)$ кеңістігінде жинақталатын

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\,v_k(x) \tag{25}$$

Фурье қатарына жіктеледі, мұндағы $\varphi_k=(\varphi,v_k)_{2,\Omega}$ $v_k(x)$ жүйесі бойынша жіктелген $\varphi(x)$ функциясының Фурье коэффициенті және $\varphi(x)$ функциясы үшін Парсеваль теңдігі

$$\|\varphi\|_{2,\Omega}^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|^2 \tag{26}$$

орынды.

Сонымен қатар, егер, $\varphi(x)\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ онда ол (22) ортонормаланған базисі бойынша Фурье қатарына жіктеледі:

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\varphi,\frac{v_k}{\sqrt{\lambda_k+1}}\right\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}\cdot\frac{v_k}{\sqrt{\lambda_k+1}} \tag{27}$$

және осыған сәйкесті Парсеваль теңдігін табамыз:

$$\|\varphi(x)\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = \left|\left\{\varphi, \frac{v_k}{\sqrt{\lambda_k + 1}}\right\}\right|^2 \tag{28}$$

Скалярлық көбейтінділерге берілген біздің анықтамаларымызға сәйкес, (27) қатар және $L_2(\Omega)$ кеңістігінде де $\varphi(x)$ функциясына жинақталады.
(28) Парсеваль теңдігінен басқа, меншікті мән және Фурье коэффициенттері үшін апиорлық бағам табайық. Ол үшін (25), (27) Фурье қатарларын салыстырып, келесі теңдікті алуға болады.

$$\varphi_k = (\varphi, v_k)_{2,\Omega} = \left\{\varphi, \frac{v_k}{\sqrt{\lambda_k + 1}}\right\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \cdot \frac{v_k}{\sqrt{\lambda_k + 1}} \tag{29}$$

(28) Парсеваль теңдігінен және (29) теңдігінен келесі теңдік шығады

$$\|\varphi(x)\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\left\{\varphi, \frac{v_k}{\sqrt{\lambda_k + 1}}\right\}_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)}\right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{\lambda_k + 1}\right)^2 |\varphi_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(1 + k)|\varphi_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|\varphi_k|^2$$

осы теңдіктен мына теңдік шығады

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|\varphi_k|^2 = \|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} - \|\varphi\|^2_{2,\Omega}$$

немесе, $\lambda_\kappa \geq 0$ болғандықтан

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|\varphi_k|^2 \leq \|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \tag{30}$$

$W_2^1(\Omega) \ni \forall\varphi$ үшін (30) ұқсас теңсіздік орынды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|\varphi_k|^2 \leq \|\varphi\|^2_{W_2^1(\Omega)} \tag{31}$$

Жоғарыдағы бүкіл пайымдауларды қорытындылап, біз негізгі теореманы тұжырымдайық.

Теорема 4. (1), (2) және (1), (3) меншікті мәндер есептерінің шешімдері келесі қасиеттерге ие:

1. Меншікті мәндер жиыны саналымды және ақырлы шектік нүктелері жоқ: $k \to \infty$ ұмтылғанда $\lambda_\kappa \to +\infty$; әрбір меншікті мәннің ақырлы еселігі бар. Бүкіл меншікті мәндер теріс емес, Дирихле және 3-ші шекаралық есептерінде олар оң болады. Ал, $q(x) \equiv 0$ болған жағдайындағы Нейман есебінде бірлестікті нөлге тең меншікті мәні бар, оған сәйкес жалпылама меншікті функциясы $v(x) = const$.

2. (1), (2) және (1), (3) есептерінің $v_1(x), v_2(x), \dots$ жалпылама меншікті функциялары $L_2(\Omega)$ кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды, яғни $L_2(\Omega)$ кеңістігінде жататын кез келген φ функциясы $L_2(\Omega)$ кеңістігінде жинақталатын Фурье қатарына жіктеледі

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \, v_k(x), \varphi_k = (\varphi, v_k)_{2,\Omega}. \tag{32}$$

Егер $\varphi(x)$ функциясы $W_2^1(\Omega)$ жататын кезе келген функция болса, онда (1), (2) есептің жалпылама меншікті функциялары бойынша жіктелген (32) қатар $\overset{0}{W_2^1}(\Omega)$-да жинақталады, сонымен қатар

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |\varphi_k|^2 \leq \|\varphi\|^2_{\overset{0}{W_2^1}(\Omega)}$$

теңсіздігі орынды.

Егер $\varphi(x)$ $W_2^1(\Omega)$ жататын болса, онда (1), (3) есебінің жалпылама меншікті функциялары бойынша жіктелген (32) қатары $W_2^1(\Omega)$ кеңістігінде жинақталады және де оған келесі теңсіздік орынды:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |\varphi_k|^2 \leq \|\varphi\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$